



**FERNANDO MAINES
ANTONIO IIRITANO
PAOLO CRESCENTE
BARBARA CENTIS**

GENIO RURALE

Per gli Istituti Tecnici indirizzo
Agraria, agroalimentare
e agroindustria

Edizione **OPENSCHOOL**

- | | |
|----------|----------------------|
| 1 | LIBRODITESTO |
| 2 | E-BOOK+ |
| 3 | RISORSEONLINE |
| 4 | PIATTAFORMA |

HOEPLI

Fernando Maines Antonio Iiritano
Paolo Crescente Barbara Centis

GENIO RURALE

Per gli Istituti Tecnici indirizzo
Agraria, agroalimentare
e agroindustria



EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

Copyright © Ulrico Hoepli Editore S.p.A. 2019

Via Hoepli 5, 20121 Milano (Italy)

tel. +39 02 864871 – fax +39 02 8052886

e-mail hoepli@hoepli.it

www.hoepli.it



Tutti i diritti sono riservati a norma di legge
e a norma delle convenzioni internazionali

NDICE

Introduzione	p. VII	3 Rilievo per intersezione	101
MODULO 1 Elementi di matematica e disegno		Esercizi svolti	104
CAPITOLO 1 Elementi di trigonometria	2	Mappa di sintesi	109
In sintesi/ <i>Abstract</i>	2	CAPITOLO 7 Rilievo per poligonazioni	112
1 Le funzioni goniometriche	3	In sintesi/ <i>Abstract</i>	112
Esercizi svolti	11	1 Le poligonali	113
Mappa di sintesi	16	2 Metodo risolutivo per le poligonali aperte ad estremi liberi	117
CAPITOLO 2 Coordinate cartesiane e polari	18	Esercizio svolto	120
In sintesi/ <i>Abstract</i>	18	3 Metodo risolutivo per le poligonali chiuse	123
1 Le coordinate cartesiane	19	Esercizio svolto	128
2 Le coordinate polari	20	Mappe di sintesi	132
Esercizi svolti	25	CAPITOLO 8 Rilievo planimetrico di dettaglio	136
Mappa di sintesi	30	In sintesi/ <i>Abstract</i>	136
CAPITOLO 3 Elementi di Disegno Tecnico	32	1 Rilievo per allineamenti	137
In sintesi/ <i>Abstract</i>	32	2 Rilievo per trilaterazione semplice	142
1 Il disegno tecnico	33	3 Rilievo per coordinate polari o radiometrico o per irradiazione	144
2 Il disegno in topografia	35	4 Rilievo per coordinate bipolari o per intersezione	146
3 Il disegno nelle costruzioni rurali	37	Esercizi svolti	147
Mappa di sintesi	40	Mappe di sintesi	152
MODULO 2 Rilievo topografico		CAPITOLO 9 Rilievo altimetrico	154
CAPITOLO 4 Introduzione alla Topografia	42	In sintesi/ <i>Abstract</i>	154
In sintesi/ <i>Abstract</i>	42	1 Concetti generali	155
1 Elementi di topografia	43	2 Livellazioni geometriche o con visuale orizzontale (misura diretta)	158
2 Il rilievo topografico	47	3 Livellazioni con visuale inclinata (misura indiretta)	160
3 Grandezze misurate in topografia	53	4 Coltellazione	161
4 Gli errori di misura	57	Esercizio svolto	163
Mappe di sintesi	62	Mappe di sintesi	167
CAPITOLO 5 Strumenti topografici	64	CAPITOLO 10 Celerimensura	170
In sintesi/ <i>Abstract</i>	64	In sintesi/ <i>Abstract</i>	170
1 Strumenti semplici	65	1 Il rilievo celerimetrico	171
2 Stazione totale	71	2 Collegamento fra due stazioni celerimetriche	175
3 Livelli	82	Esercizi svolti	176
4 Laser scanner 3D	85	Mappa di sintesi	181
Mappe di sintesi	88		
CAPITOLO 6 Rilievo planimetrico di inquadramento	94		
In sintesi/ <i>Abstract</i>	94		
1 Rilievo per trilaterazione	96		
2 Rilievo per triangolazioni	99		

CAPITOLO 11 Restituzione grafica	182	5 Telerilevamento	265
In sintesi/ <i>Abstract</i>	182	6 Ortofoto e immagini satellitari	268
1 Elementi preliminari	183	Mappe di sintesi	270
2 Restituzione planimetrica	186	CAPITOLO 16 Catasto	
3 Restituzione altimetrica	187	e variazioni catastali	274
Mappe di sintesi	196	In sintesi/ <i>Abstract</i>	274
CAPITOLO 12 Sistemi di rilevamento satellitare	198	1 Il Catasto	275
In sintesi/ <i>Abstract</i>	198	2 Il Catasto Italiano	276
1 Sistemi di rilevamento satellitare	199	3 Operazioni di aggiornamento catastale	284
2 Struttura del sistema GNSS	199	Mappe di sintesi	290
3 I segnali dei satelliti	202	MODULO 4 Applicazioni per superfici e volumi	
4 Errori di posizionamento	204	CAPITOLO 17 Agrimensura	294
5 Modalità operative	206	In sintesi/ <i>Abstract</i>	294
6 Tecniche di rilievo	208	1 Introduzione	295
7 Progettazione di un rilievo con GNSS	210	2 Calcolo delle aree	296
8 Tipologie di ricevitori GPS	211	3 Frazionamenti	298
Mappe di sintesi	212	4 Rettifiche e spostamento dei confini	301
CAPITOLO 13 Fotogrammetria aerea	214	Esercizi svolti	305
In sintesi/ <i>Abstract</i>	214	Mappe di sintesi	307
1 Elementi teorici di fotogrammetria	215	CAPITOLO 18 Spianamenti	310
2 Acquisizione delle fotografie	216	In sintesi/ <i>Abstract</i>	310
3 Orientamento dei fotogrammi e restituzione	220	1 Introduzione	311
4 L'utilizzo dei droni in aerofotogrammetria	223	2 Spianamenti con piano assegnato	313
Mappe di sintesi	228	3 Spianamenti con piano a compenso	319
MODULO 3 cartografia e catasto		Esercizi svolti	320
CAPITOLO 14 Cartografia tecnica	232	Mappe di sintesi	324
In sintesi/ <i>Abstract</i>	232	MODULO 5 elementi introduttivi alle costruzioni in ambito rurale	
1 Elementi introduttivi alla cartografia	233	CAPITOLO 19 Abitazioni rurali e normativa urbanistica	328
2 Le proiezioni cartografiche	234	In sintesi/ <i>Abstract</i>	328
3 Classificazione delle carte	236	1 Principali caratteristiche degli edifici rurali	329
4 Cartografia di base italiana	239	2 La normativa urbanistica	335
5 Carta Tecnica Regionale	245	3 Mini glossario di urbanistica	343
6 Cartografia catastale	248	Mappe di sintesi	348
7 Carte tematiche	249	CAPITOLO 20 Materiali da costruzione	350
Mappe di sintesi	258	In sintesi/ <i>Abstract</i>	350
CAPITOLO 15 Sistemi Informativi Geografici (GIS)	258	1 Materiali da costruzione	351
In sintesi/ <i>Abstract</i>	258	Mappe di sintesi	386
1 Introduzione	259	CAPITOLO 21 Elementi costruttivi	388
2 Dati	261	In sintesi/ <i>Abstract</i>	388
3 Rappresentazione dei dati	262	1 Fondazioni	390
4 Fasi operative e funzionalità dei GIS	264		

2 Murature	399	3 Materiali usati per la costruzione delle serre	564
3 Solai	402	4 Irrigazione nelle serre	570
4 Tetti	406	5 Climatizzazione delle serre	570
5 Scale	412	Mappa di sintesi	576
6 Elementi prefabbricati	416	CAPITOLO 27 Impianti di irrigazione	578
Mappa di sintesi	417	In sintesi/Abstract	578
CAPITOLO 22 Elementi di statica	418	1 L'irrigazione	579
In sintesi/Abstract	418	2 Impianti di irrigazione per aspersione (a pioggia)	584
1 La statica delle travi	419	3 Microirrigazione	589
2 Metodi di calcolo	448	4 Subirrigazione capillare	591
3 Analisi dei carichi	452	Mappa di sintesi	592
Mappa di sintesi	455	MODULO 7 strutture per la trasformazione dei prodotti	
CAPITOLO 23 Impianti tecnici	456	CAPITOLO 28 Cantine, frantoi e caseifici	594
In sintesi/Abstract	456	In sintesi/Abstract	594
1 Impianto elettrico	457	1 Le cantine	595
2 Impianto di riscaldamento	469	2 L'oleificio (o frantoio)	612
3 Cenni sull'impianto di climatizzazione	479	3 Il caseificio	620
4 Impianto idrico-sanitario	482	Mappe di sintesi	628
Mappa di sintesi	493	MODULO 8 ingegneria ambientale	
CAPITOLO 24 Opere di finitura	494	CAPITOLO 29 Zone a rischio e opere di difesa	634
In sintesi/Abstract	494	In sintesi/Abstract	634
1 Pavimentazioni	495	1 Il dissesto del territorio	635
2 Infissi e serramenti	502	2 Il rischio Idrogeologico	635
3 Rivestimenti murari	510	3 Il rischio sismico	636
4 Tinteggiature	517	4 Principali normative sulla tutela ambientale	639
Mappa di sintesi	520	5 Interventi sui fiumi	642
MODULO 6 strutture aziendali		6 Interventi sui versanti	653
CAPITOLO 25 Strutture zootecniche	524	Mappa di sintesi	667
In sintesi/Abstract	524	CAPITOLO 30 Impianti a risparmio energetico	668
1 Principali caratteristiche delle strutture zootecniche	525	In sintesi/Abstract	668
2 Strutture zootecniche per l'allevamento delle bovine da latte	526	1 Impianto fotovoltaico	669
3 Strutture zootecniche per l'allevamento dei bovini da carne	540	2 Impianti eolici	673
4 Strutture per l'allevamento dei suini	543	3 Impianti idroelettrici	678
5 Strutture per l'allevamento degli avicoli	551	4 Impianti a biomassa	682
Mappa di sintesi	558	Mappa di sintesi	685
CAPITOLO 26 Strutture vivaistiche	560	Ringraziamenti	686
In sintesi/Abstract	560	Referenze fotografiche	687
1 Strutture vivaistiche	561		
2 Classificazione delle serre	562		

INDICE MATERIALE ONLINE

È possibile accedere ai materiali digitali (approfondimenti e video) dal sito hoepliscuola.it e dell'eBook+ del volume.

Approfondimenti

Strumenti d'epoca 1930-1960	76
Metodo risolutivo per le poligonali aperte ad estremi vincolati	123
Esempio di calcolo di poligonale aperta con estremi vincolati	127
NAVSTAR GPS	202
Approfondimento sui dati e loro gestione nei GIS	263
Approfondimento sulle onde elettromagnetiche utilizzate nel telerilevamento	266
Testo completo della legge 3682/1886 (legge Messedaglia)	277
Tabella origini cartografia catastale	280
Tabella delle qualità catastali dei terreni e delle categorie catastali dei fabbricati	281
Esempi di visura catastale	284
Manuale PREGEO e monografia di un Punto Fiduciale	287
Ulteriori informazioni sul DOCFA e Manuale operativo	287
La formula di Gauss	298
Frazionamento terreni di forma triangolare	300
Legge Regionale Toscana 64/1995	343
Utilizzo del calcestruzzo	365
Essiccazione del legno	369
Classificazione chimica dei polimeri	376
Sezioni con un asse di simmetria	444
Sezioni con più assi di simmetria	444
Pesi per unità di volume dei principali materiali strutturali	453
Pesi dei materiali	453
Pesi degli elementi costruttivi	453
Valori dei carichi d'esercizio per le diverse categorie di edifici	454
Esempio di calcolo per una cantina	454
Esempio di progetto di un complesso per l'allevamento, in stabulazione libera, di bovine da latte	538
Trattamento dei reflui zootecnici	557
Analisi preliminare alla progettazione di un impianto di trasformazione dei prodotti	595
Testo completo del DM 17.01.2018 (NTC 2018)	638
Studio di un muro di sostegno a gravità alto 3 m	665
Paratie	666
Breve glossario del capitolo	684

Video

Videotutorial sull'uso del DOCFA della provincia di Bolzano	287
---	-----

INTRODUZIONE

Genio rurale è la disciplina che applica, in ambito agrario, zootecnico e forestale le metodologie, il rigore e gli strumenti propri dell'ingegneria; lo scopo è quello di fornire le tecniche, le procedure e gli strumenti necessari allo studio del territorio e all'analisi dei contesti operativi per assicurare efficienza, efficacia e flessibilità alle strutture edili, alle attrezzature ed alle attività connesse al mondo rurale.

Lo studio di tale disciplina non è finalizzato, pertanto, alla formazione di un progettista, ma ha come obiettivo primario quello di fornire al perito agrario le competenze necessarie per affiancare e collaborare attivamente con figure professionali specifiche (geometri, topografi, ingegneri, ...) e di giudicarne l'operato.

L'insegnamento nasce recentemente dall'unione dei precedenti insegnamenti di Topografia e di Costruzioni rurali. Questa modifica, introdotta dalla riforma della Scuola secondaria di secondo grado del 2011, oltre ad una consistente riduzione delle ore settimanali, ha determinato un complesso processo di riorganizzazione dei programmi e delle relative finalità. In particolare, è cambiato profondamente l'approccio didattico – ora orientato allo sviluppo di competenze professionali – che consentano al perito agrario di individuare strategie più efficaci per la risoluzione dei problemi.

Questo libro, frutto della collaborazione fra tre docenti degli istituti agrari di San Michele all'Adige e di Firenze, con pluriennale esperienza nell'insegnamento, prima di Topografia e Costruzioni, poi di Genio rurale, nasce proprio per rispondere a tali richieste.

Le diverse unità didattiche sono state organizzate in modo che il processo didattico (la successione degli argomenti, le modalità con le quali vengono presentati e spiegati i concetti, le tipologie degli esercizi e le modalità di autovalutazione proposte) risulti calibrato per rispondere alle specifiche esigenze formative di un Istituto agrario. Si tratta di una prospettiva nuova, ben diversa da una semplice trasposizione e semplificazione di testi di Topografia e di Costruzioni utilizzati in Istituti Tecnici di altro indirizzo.

Il testo presenta una vasta gamma di argomenti inerenti ai diversi ambiti operativi e consente a ciascun docente di predisporre programmi didattici differenziati, specifici per ciascuna delle tre articolazioni dell'Istituto Tecnico con indirizzo in Agraria, agroalimentare e agroindustria.

Non ci rimane che augurare un buon lavoro a tutti, docenti e studenti.

Gli Autori

L'OFFERTA DIDATTICA **HOEPLI**

L'edizione **Openschool** Hoepli offre a docenti e studenti tutte le potenzialità di Openschool Network (ON), il nuovo sistema integrato di contenuti e servizi per l'apprendimento.

Edizione **OPENSCHOOL**



LIBRO DI TESTO



Il libro di testo è l'**elemento cardine** dell'offerta formativa, uno strumento didattico **agile** e **completo**, utilizzabile **autonomamente** o in combinazione con il ricco **corredo digitale** offline e online. Secondo le più recenti indicazioni ministeriali, volume cartaceo e apparati digitali **sono integrati in un unico percorso didattico**. Le espansioni accessibili attraverso l'eBook+ e i materiali integrativi disponibili nel sito dell'editore sono puntualmente richiamati nel testo tramite apposite icone.

eBOOK+



L'**eBook+** è la versione digitale e interattiva del libro di testo, utilizzabile su **tablet, LIM e computer**. Aiuta a comprendere e ad approfondire i contenuti, rendendo l'apprendimento più attivo e coinvolgente. Consente di leggere, annotare, sottolineare, effettuare ricerche e accedere direttamente alle numerose **risorse digitali integrative**. ➔ Scaricare l'eBook+ è molto **semplice**. È sufficiente seguire le istruzioni riportate nell'ultima pagina di questo volume.

RISORSE ONLINE



Il sito della casa editrice offre una ricca dotazione di **risorse digitali** per l'approfondimento e l'aggiornamento. Nella pagina web dedicata al testo è disponibile **my BookBox**, il contenitore virtuale che raccoglie i materiali integrativi che accompagnano l'opera. ➔ Per accedere ai materiali è sufficiente registrarsi al sito **www.hoepliscuola.it** e inserire il codice coupon che si trova nell'ultima pagina di questo volume. **Per il docente** nel sito sono previste ulteriori risorse didattiche dedicate.

PIATTAFORMA DIDATTICA



La **piattaforma didattica** è un ambiente digitale che può essere utilizzato in modo duttile, a misura delle esigenze della classe e degli studenti. Permette in particolare di **condividere contenuti** ed **esercizi** e di partecipare a **classi virtuali**. Ogni attività svolta viene salvata sul **cloud** e rimane sempre disponibile e aggiornata. La piattaforma consente inoltre di consultare la versione online degli eBook+ presenti nella propria libreria. ➔ È possibile accedere alla piattaforma attraverso il sito **www.hoepliscuola.it**.

1 MODULO

Elementi di matematica e disegno

CAPITOLO **1** Elementi di Trigonometria

CAPITOLO **2** Coordinate cartesiane e polari

CAPITOLO **3** Elementi di Disegno Tecnico

ConoSceNze

- Semplici formule di trigonometria
- Sistemi di coordinate cartesiane e polari
- Norme e tecniche di rappresentazione grafica

Abilità

- Risolvere triangoli e quadrilateri, dei quali siano noti lati e angoli e/o coordinate dei vertici
- Utilizzare diversi metodi e strumenti di rappresentazione grafica

Competenze

- Studio autonomo di semplici problemi planimetrici relativi ai poligoni
- Interpretazione di semplici rappresentazioni grafiche plano-altimetriche

Capitolo 1

Elementi di trigonometria

In sintesi

In questo primo capitolo verranno presentati gli elementi essenziali di goniometria e di trigonometria per affrontare in modo corretto e consapevole la risoluzione dei triangoli, abilità fondamentale in topografia che consente di affrontare la risoluzione di qualsiasi figura poligonale. Per evidenziare questo aspetto fondamentale verranno presentati anche i metodi per la risoluzione dei quadrilateri. Per evitare un impatto spesso critico con tali aspetti matematici abbiamo ridotto al minimo indispensabile le formule da utilizzare.

ITALIANO

Abstract

In this first chapter, we will present the basic elements of goniometry and trigonometry to deal with the resolution of triangles. This is a fundamental skill to solve every polygonal feature.

To enforce this fundamental aspect, we will present the common methods to solve the quadrilaterals.

To avoid a hard crash, we have cut down to the minimum the mathematical formulas to be used.

CLIL

ENGLISH

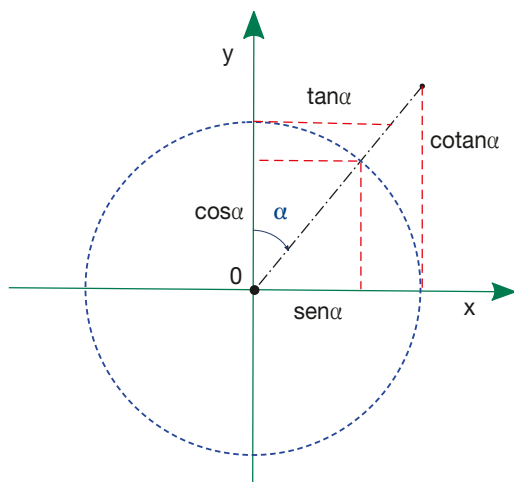
1 Le funzioni goniometriche

Nella maggior parte delle applicazioni topografiche le linee curve vengono approssimate con delle spezzate in modo da ottenere elementi rappresentati mediante figure poligonali.

Dato che qualsiasi poligono può essere suddiviso comunque in triangoli, è essenziale saper risolvere¹ tale figura per poter eseguire la maggior parte delle procedure utilizzate in topografia.

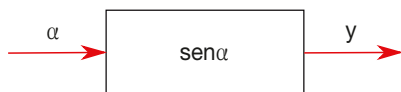
In particolare utilizzeremo gli strumenti analitici forniti dalla trigonometria che consentono di definire ogni elemento di un triangolo (perimetro, area, coordinate dei vertici, ...) a partire dalla misurazione di distanze, angoli e dislivelli eseguite nel corso del rilievo topografico.

In questa sede ci limiteremo all'utilizzo delle tre **funzioni goniometriche** principali (seno, coseno, tangente) e della **cotangente**, il cui significato geometrico è riassunto nella figura seguente.



Circonferenza di raggio unitario.

Si ricorda che quelle goniometriche sono funzioni che ricevono un valore angolare e restituiscono un valore numerico.

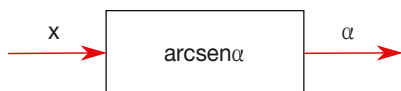


Inoltre valgono le seguenti relazioni fondamentali:

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;
- $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.²

Molto utilizzate nei calcoli trigonometrici sono anche le funzioni goniometriche inverse, e in particolare l'arcoseno ($\arcsin x$), l'arccoseno ($\arccos x$), l'arcotangente ($\arctan x$) e l'arcocotangente ($\text{arccot} x$).

Queste funzioni, essendo le **inverse** delle precedenti, elaborano un valore numerico e restituiscono un valore angolare.



1. Ricordiamo che per poter risolvere un triangolo è necessario conoscere le dimensioni di almeno tre elementi di cui almeno un lato. Questa regola può essere generalizzata: un poligono di n vertici (n lati e n angoli) può essere risolto trigonometricamente se sono noti almeno $(2n - 3)$ elementi (lati o angoli).

2. Questa relazione viene espressa dicendo che la cotangente è l'**inverso** della tangente.

È importante non confondere la funzione inversa ($\arcsen x$) dall'inverso ($1/\sen x$ o $\sen^{-1} x$ o $\csc x$), errore dovuto anche al fatto che molte calcolatrici, per motivi di spazio, usano la scritta $\sen^{-1} x$ per indicare $\arcsen x$.

A tal proposito ricordiamo anche che per poter utilizzare correttamente le calcolatrici si devono rispettare alcune regole di base:

- verificare il metodo di immissione dei dati. Le calcolatrici, infatti, possono adottare due protocolli diversi:
 - metodo tradizionale o inverso (sempre meno adottato): per inserire l'espressione

$$\sqrt{\arcsen(a^2)}$$

si digita la seguente successione di tasti: a , x^2 , $\arcsen x$, radice.

- metodo “progressivo” (ora il più adottato): per inserire l'espressione

$$\sqrt{\arcsen(a^2)}$$

si digita la seguente successione di tasti radice, $\arcsen x$, a , x^2 .

- se si utilizzano le funzioni goniometriche e le relative funzioni inverse ricordarsi di impostare la calcolatrice sul sistema angolare corretto:
 - DEG (D) per gli angoli sessadecimali;
 - GRAD (G) per gli angoli centesimali;
 - RAD (R) per gli angoli radianti.
- quando si utilizza il teorema dei seni per calcolare un angolo (utilizzando la funzione arcoseno) bisogna ricordarsi che la calcolatrice opera sempre nel primo quadrante (angolo compreso fra 0 e $\pi/2$). Infatti dato un valore del seno compreso fra 0 e 1 esistono due angoli (che possono essere presenti in un triangolo) che assumono lo stesso valore di $\sen x$:
 - l'angolo α_1 compreso fra 0 e $\pi/2$ (1° quadrante);
 - l'angolo α_2 compreso fra $\pi/2$ e π (2° quadrante) legato all'angolo precedente dall'espressione $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$.

Pertanto non sempre il valore ottenuto è quello giusto in quanto, nel caso di un triangolo ottusangolo, uno degli angoli è maggiore di $\pi/2$. Tale situazione può essere riconosciuta in quanto un lato (quello opposto all'angolo ottuso) ha una lunghezza decisamente maggiore degli altri due lati. Pertanto, se la somma degli angoli interni del triangolo non risultasse pari a π , al posto del valore dato dalla calcolatrice (ottenuto con la funzione $\arcsen x$) va sostituito con il suo supplementare (ottenuto sottraendo l'angolo della calcolatrice a π). A questo punto è necessario effettuare nuovamente la verifica; un esito positivo è la prova che si tratta proprio di un triangolo ottusangolo.

Infine ricordiamo che, quando di un triangolo sono noti due angoli, è possibile determinare il terzo sottraendo la loro somma a π . È bene, però, utilizzare questa possibilità solo qualora non fosse possibile applicare nessuna altra formula. In tal modo, infatti, sarà possibile la verifica, al termine dei calcoli, dei valori angolari ottenuti (la somma deve essere, con buona approssimazione, pari a π).

La risoluzione di un triangolo qualsiasi

Per studiare un terreno di forma triangolare si misurano i suoi lati ed i suoi angoli, ma non necessariamente tutti, infatti per determinare in maniera univoca un triangolo ABC è sufficiente conoscerne tre elementi, uno dei quali deve essere un lato.

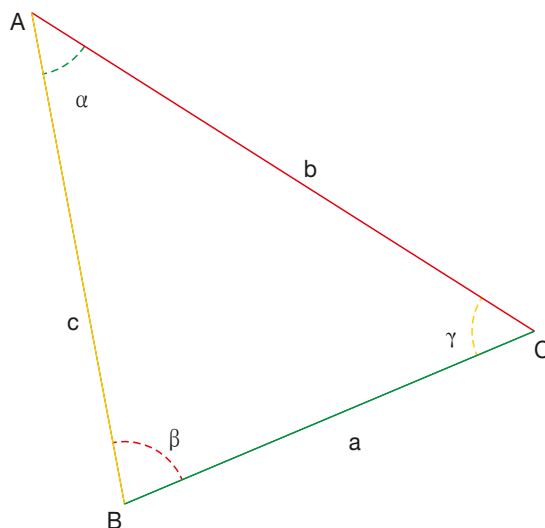
Se si misurano, invece, quattro o più elementi allora si possono compensare gli errori di misura, in maniera empirica oppure rigorosa.

Ad esempio misurando un lato e tutti gli angoli può accadere, anzi accade quasi sempre, che sommando i valori dei tre angoli misurati si ottenga un risultato diverso dall'angolo piatto³, e quindi l'errore può essere ripartito equamente fra i tre angoli.

Per risolvere un triangolo qualsiasi è sufficiente utilizzare i seguenti teoremi o formule:

- **teorema dei seni;**
- **teorema del coseno** (o di Carnot);
- **formule** per il calcolo dell'area.

Nella figura seguente è riportata la convenzione più diffusa per le lettere utilizzate per indicare vertici (A, B, C), lati (a, b, c) e angoli (α , β , γ).



3. La somma teorica degli angoli di un triangolo è uguale ad un angolo piatto, ovvero 180 gradi sessagesimali, 200 gradi centesimali oppure π radianti.

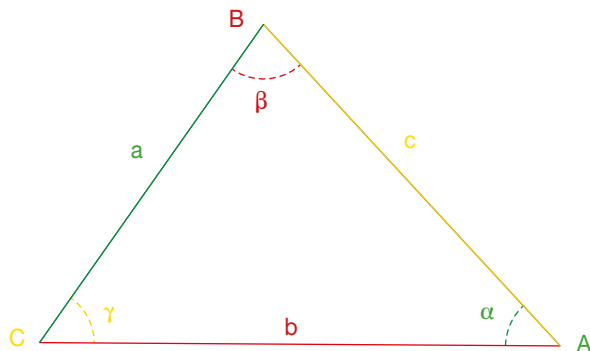
Il teorema dei seni

Questo primo teorema afferma: *“in un triangolo qualsiasi il rapporto tra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto è costante.”*

L'enunciato può essere espresso con le seguenti formule:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\gamma}{c} \quad \text{oppure} \quad \frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$

Osservando le espressioni si comprende che il teorema dei seni è applicabile solo quando sono noti gli elementi di una coppia lato e angolo opposto (a, α ; b, β ; c, γ).



In tal caso, conoscendo un elemento di un'altra coppia è possibile calcolarne "l'omologo". Due sono i possibili casi di cui proponiamo un esempio ciascuno:

1. noti a, b, β posso trovare α :

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{b} \cdot a \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{\sin \beta}{b} \cdot a\right)$$

2. noti α, b, β posso trovare a :

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha$$

Una particolare applicazione del teorema dei seni, consente di definire le formule utilizzate per la risoluzione dei triangoli rettangoli. Indicati con γ l'angolo retto e con c l'ipotenusa valgono le seguenti regole:

- un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto (al cateto) o per il coseno dell'angolo adiacente. Tale regola può essere espressa con le seguenti relazioni:

$$a = c \cdot \sin \alpha; \quad a = c \cdot \cos \beta; \quad b = c \cdot \sin \beta; \quad b = c \cdot \cos \alpha.$$

Dalle precedenti formule si possono ricavare le relazioni per il calcolo degli angoli quando siano noti un cateto e l'ipotenusa.

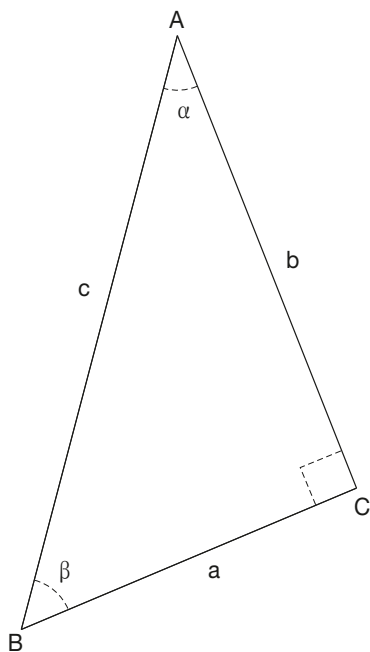
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right); \quad \alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right); \quad \beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right); \quad \beta = \arccos\left(\frac{a}{c}\right)$$

- un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto (al primo cateto) o per la cotangente dell'angolo adiacente:

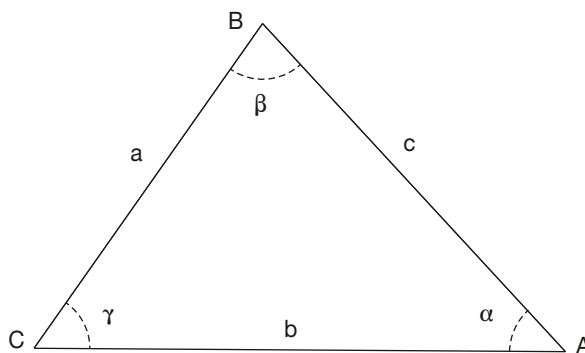
$$a = b \cdot \tan \alpha; \quad a = b \cdot \cotan \beta; \quad b = a \cdot \tan \beta; \quad b = a \cdot \cotan \alpha.$$

Anche in questo caso si possono ricavare le relazioni per il calcolo degli angoli quando siano noti i due cateti.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right); \quad \beta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$



Il teorema del coseno o di Carnot



L'enunciato del teorema è il seguente: "in un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuito del doppio prodotto di questi per il coseno dell'angolo compreso". In forma analitica si esprime con le formule seguenti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Due sono pertanto i casi nei quali è applicabile il teorema del coseno:

- noti due lati e l'angolo compreso (b, c, α ; a, c, β ; a, b, γ) è possibile calcolare il terzo lato attraverso le espressioni:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}$$

- noti tutti e tre i lati, è possibile ricavare i tre angoli mediante:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \quad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \quad \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Le formule per il calcolo delle aree

Le principali formule per il calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi sono:

- formule base da usarsi quando sono noti due lati e l'angolo compreso:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} \quad S = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} \quad S = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2}$$

- formula di Erone qualora siano noti tutti i lati:

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$\text{dove } p = \frac{(a + b + c)}{2}.$$

Metodiche risolutive

A completamento riportiamo le metodiche risolutive dei possibili casi che si possono incontrare.

Studiamo la risoluzione di un triangolo di cui si conoscano tre elementi, considerando gli angoli espressi nel *sistema di misura centesimale*.

Si possono presentare i quattro casi seguenti (**N.B.**: nelle figure successive gli elementi noti sono riportati in rosso).

CASO 1

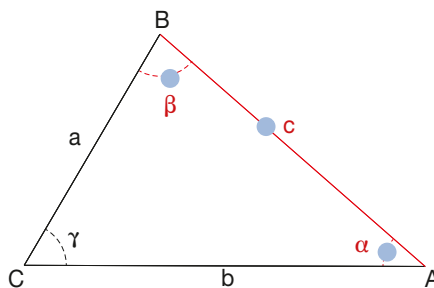
Sono noti 1 lato e 2 angoli qualunque

$$\gamma = 200 - (\alpha + \beta)$$

$$BC = AB \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$CA = AB \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \beta}{2}$$



CASO 2

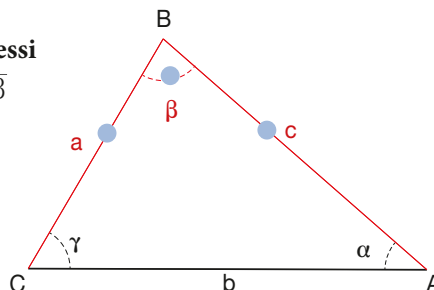
Sono noti 2 lati e l'angolo compreso tra essi

$$CA = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \beta}$$

$$\alpha = \arcsin\left(BC \cdot \frac{\sin \beta}{CA}\right)$$

$$\gamma = \arcsin\left(AB \cdot \frac{\sin \beta}{CA}\right)$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \beta}{2}$$



CASO 3

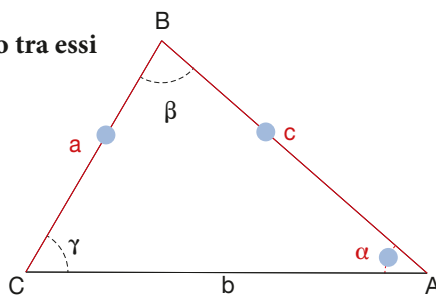
Sono noti 2 lati e 1 angolo non compreso tra essi

$$\gamma = \arcsen\left(AB \cdot \frac{\sen\alpha}{BC}\right)$$

$$\beta = 200 - (\alpha + \gamma)$$

$$CA = BC \cdot \frac{\sen\beta}{\sen\alpha}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sen\beta}{2}$$



CASO 4

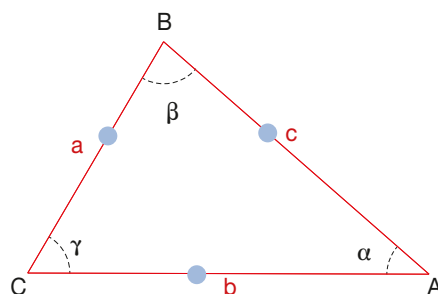
Sono noti i 3 lati

$$\alpha = \arccos\left[\frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot CA \cdot AB}\right]$$

$$\beta = \arccos\left[\frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2 \cdot AB \cdot BC}\right]$$

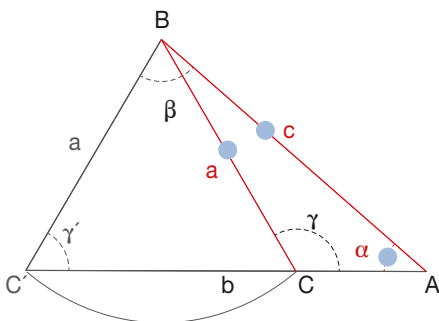
$$\gamma = \arccos\left[\frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot CA}\right]$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sen\beta}{2}$$



CASO PARTICOLARE DI TRIANGOLO OTTUSANGOLO

Sono noti 2 lati e 1 angolo acuto non compreso tra essi



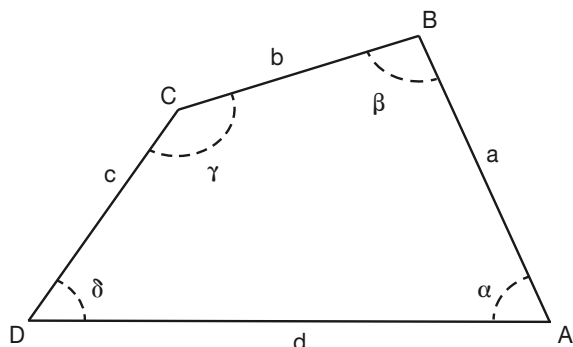
quando si calcola un angolo ottuso, il teorema dei seni:

$$\gamma = \arcsen\left(AB \cdot \frac{\sen\alpha}{BC}\right)$$

la calcolatrice fornisce il valore dell'angolo γ' (ovvero il supplementare dell'angolo γ), perciò l'angolo γ si ricava con la formula seguente:

$$\gamma = 200 - \gamma'$$

La risoluzione dei quadrilateri

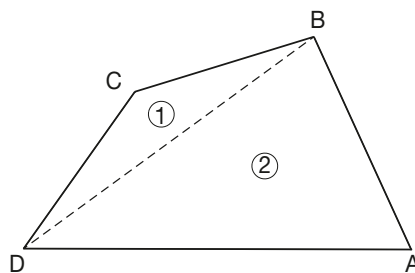
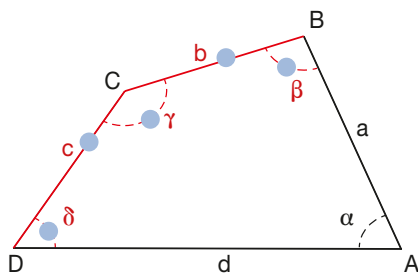


Metodiche risolutive

Affinché un quadrilatero sia definito univocamente si devono conoscere non meno di cinque dei suoi elementi, dei quali almeno due lati. Il processo di risoluzione richiede la scomposizione del quadrilatero in 2 o più triangoli. Di seguito vengono risolti i sette possibili casi che si possono presentare, per i quali adottiamo la convenzione della figura accanto per quanto riguarda lati e angoli.

CASO 1

Sono noti 2 lati consecutivi e 3 angoli qualunque



si ricava il quarto angolo, considerando che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è uguale ad un angolo giro, si scompone il quadrilatero con la diagonale AC e si risolvono il triangolo 1 e, successivamente, il triangolo 2.

CASO 2

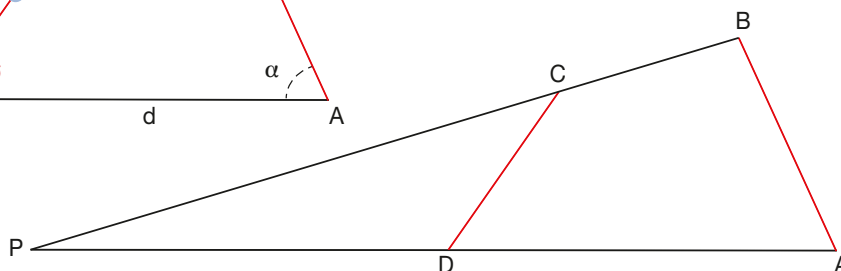
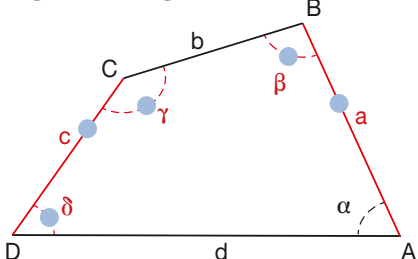
Sono noti 2 lati opposti e 3 angoli qualunque

come prima si ricava il quarto angolo, considerando che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è uguale ad un angolo giro, si prolungano i due lati incogniti fino a farli intersecare nel punto esterno P e si risolvono i triangoli ABP e DCP, ricavando poi gli elementi incogniti del quadrilatero ABCD nel modo seguente:

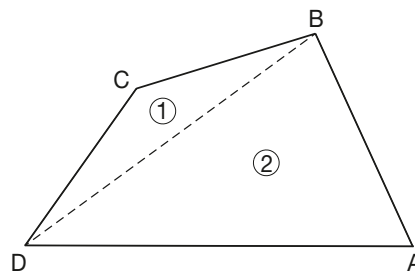
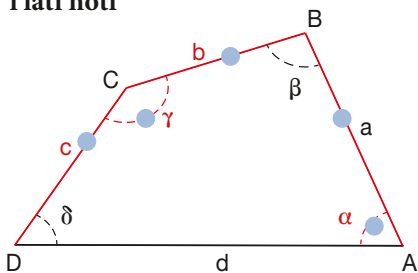
$$BC = PB - PC$$

$$DA = PA - PD$$

$$S_{ABCD} = S_{ABP} - S_{DCP}$$

**CASO 3**

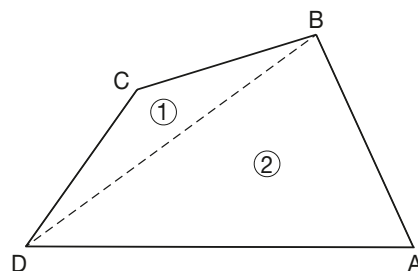
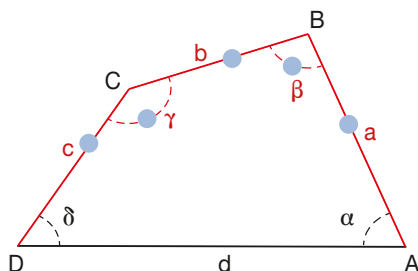
Sono noti 3 lati, 1 angolo compreso fra i lati noti e 1 angolo non compreso fra i lati noti



si scompone il quadrilatero con la diagonale che non divide in due parti gli angoli noti (nello schema grafico è la diagonale BD), e si risolvono il triangolo 1, successivamente il triangolo 2.

CASO 4

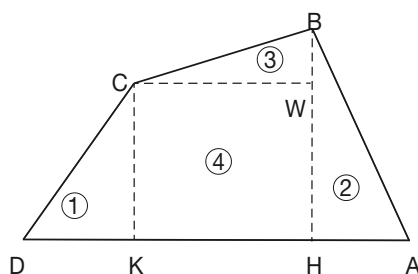
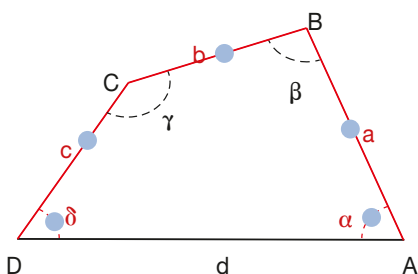
Sono noti 3 lati e i 2 angoli fra essi compresi



si scompone il quadrilatero con la diagonale BD e si risolvono prima il triangolo 1 e, successivamente, il triangolo 2; oppure si potrebbe tracciare la diagonale AC e risolvere prima il triangolo ABC e poi il triangolo CDA.

CASO 5

Sono noti 3 lati e i 2 angoli adiacenti al lato incognito

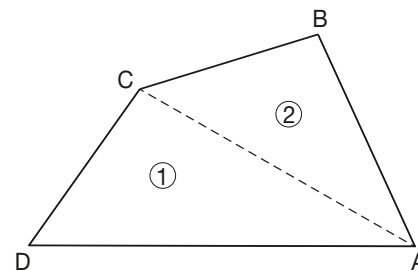
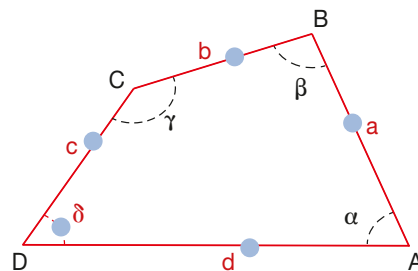


si scompone il quadrilatero in tre triangoli rettangoli ed un rettangolo tracciando due perpendicolari ed una parallela al lato incognito, come indicato nello schema grafico, e si risolvono in ordine: triangolo 1, triangolo 2, triangolo 3 e rettangolo 4.

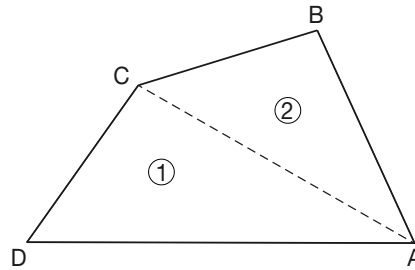
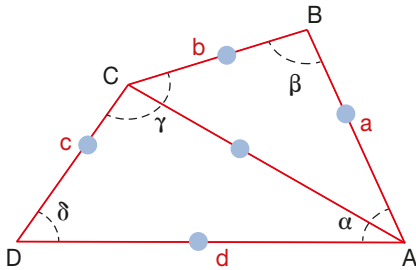
N.B.: lo stesso metodo si può applicare (con piccole variazioni) nel caso siano noti due lati non contigui e 3 angoli.

CASO 6

Sono noti 4 lati e 1 angolo



si traccia la diagonale che non divide in due parti l'angolo noto (nello schema grafico si traccia la diagonale AC), si risolve il triangolo di cui si conoscono tre elementi (triangolo 1) e poi l'altro triangolo (triangolo 2).

CASO 7**Sono noti 4 lati e 1 diagonale**

il quadrilatero risulta già diviso in due triangoli (mediante la diagonale nota); si risolvono questi due triangoli e si ottengono gli angoli e l'area del quadrilatero ABCD.

Esercizi svolti

1. Si misurano il lato AB e gli angoli nei vertici A, B e C di un terreno di forma triangolare ABC:

$$AB = 46,89 \text{ m}$$

$$\alpha^* = 77,815 \text{ gon}$$

$$\beta^* = 68,955$$

$$\gamma^* = 53,242 \text{ gon}$$

Determinare la lunghezza dei lati BC e CA del terreno in esame.

Svolgimento

In questo problema il numero di misure eseguite risulta sovrabbondante, in quanto sono stati misurati tutti gli angoli mentre per risolvere il triangolo sarebbero sufficienti soltanto due di essi; pertanto si possono compensare gli errori di misura. Si calcola la somma degli angoli misurati e la si confronta con la somma teorica degli angoli (200 gon), ricavando così il cosiddetto "errore di chiusura angolare"⁴. Si sottrae un terzo dell'errore da ciascuno degli angoli misurati, e si ottiene il loro valore compensato, che viene rappresentato con la lettera greca corrispondente senza asterisco:

$$\Delta_\alpha = (\alpha + \beta + \gamma) - 200 = 0,012 \text{ gon}$$

$$\alpha = \alpha^* - \frac{\Delta_\alpha}{3} = 77,811 \text{ gon}$$

$$\beta = \beta^* - \frac{\Delta_\alpha}{3} = 68,951 \text{ gon}$$

$$\gamma = \gamma^* - \frac{\Delta_\alpha}{3} = 53,238 \text{ gon}$$

in questo modo la somma dei tre angoli compensati risulta esattamente uguale alla somma teorica:

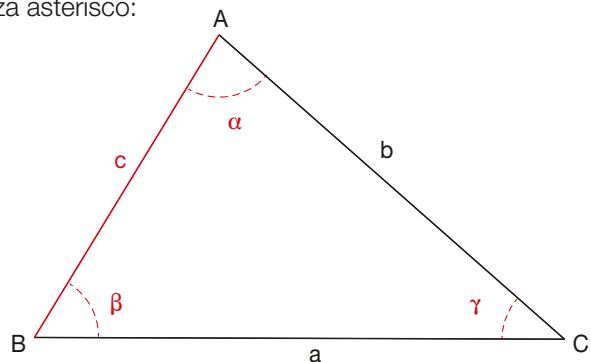
$$\alpha + \beta + \gamma = 200 \text{ gon}$$

Si applica il teorema dei seni e si ricavano i lati BC e CA:

$$BC = AB \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 59,38 \text{ m}$$

$$CA = AB \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 55,82 \text{ m}$$

4. Vedere, più avanti, lo studio delle poligoni chiuse; in questo caso il triangolo può essere considerato una poligonale chiusa di tre vertici.



2. Si misurano i lati AB, BC e l'angolo α nel vertice A di un terreno di forma triangolare ABC:

AB = 54,63 m

BC = 49,95 m

$\alpha = 59,736$ gon

Determinare gli elementi incogniti del terreno in esame.

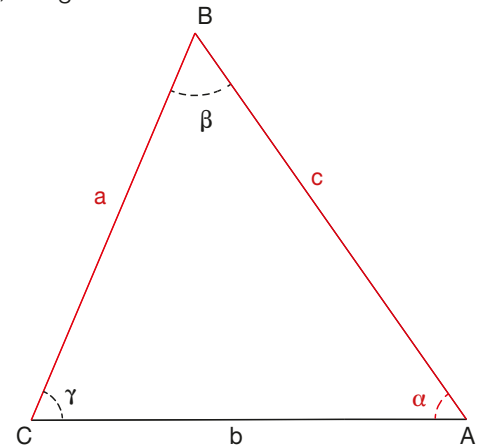
Svolgimento

In questo problema il numero di misure eseguite risulta strettamente sufficiente per risolvere il triangolo. Si applica il teorema dei seni e si determinano gli elementi incogniti:

$$\gamma = \arcsin\left(AB \cdot \frac{\sin \alpha}{BC}\right) = 68,780 \text{ gon}$$

$$\beta = 200 - (\alpha + \gamma) = 71,484 \text{ gon}$$

$$CA = BC \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 55,82 \text{ m}$$



3. Si misurano i lati AB, BC e l'angolo α di un terreno di forma triangolare ABC, che presenta un angolo ottuso nel vertice C:

AB = 54,63 m BC = 49,95 m $\alpha = 59,736$ gon

Determinare gli elementi incogniti del terreno in esame.

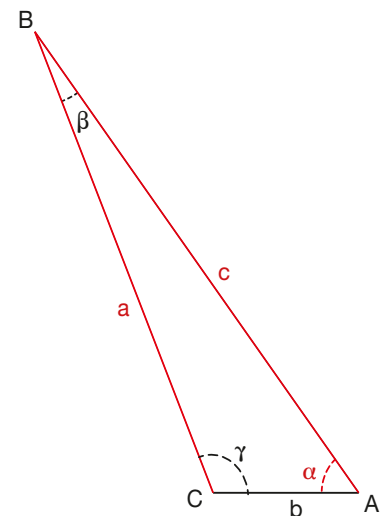
Svolgimento

Trattandosi di un triangolo ottusangolo, il valore dell'angolo nel vertice C si ottiene calcolando l'angolo supplementare del valore che fornisce la calcolatrice scientifica:

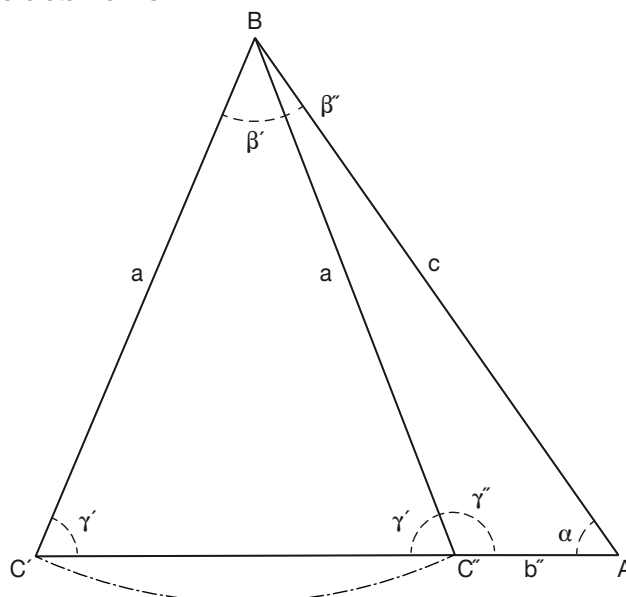
$$\gamma = 200 - 68,780 = 131,220 \text{ gon}$$

$$\beta = 200 - (\alpha + \gamma) = 9,044 \text{ gon}$$

$$CA = BC \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 8,77 \text{ m}$$



Osservazione: la figura mostra la soluzione grafica dei due esercizi precedenti. Si nota che i punti C' e C'' si trovano su una circonferenza di centro B e raggio pari alla distanza BC.



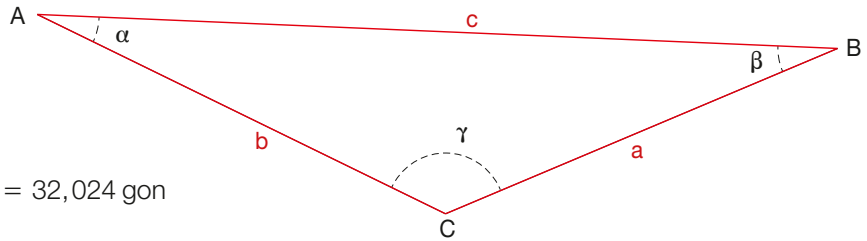
4. Si misurano i lati AB, BC e CA di un terreno di forma triangolare ABC:

$$AB = 91,42 \text{ m}$$

$$BC = 50,32 \text{ m}$$

$$CA = 55,81 \text{ m}$$

Determinare gli angoli nei vertici A, B e C.



Svolgimento

Si applica il teorema di Carnot:

$$\alpha = \arccos \left[\frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot CA \cdot AB} \right] = 32,024 \text{ gon}$$

$$\beta = \arccos \left[\frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \right] = 35,913 \text{ gon}$$

$$\gamma = \arccos \left[\frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot CA} \right] = 132,063 \text{ gon}$$

Osservazione: il teorema di Carnot si applica indifferentemente per triangoli acutangoli e ottusangoli.

5. Risolvere il quadrilatero ABCD di cui si conoscono i lati AB, BC e DA e gli angoli nei vertici A e B:

$$DA = 41,688 \quad \text{m}$$

$$AB = 33,615 \quad \text{m}$$

$$BC = 29,565 \quad \text{m}$$

$$\alpha = 82,7356 \quad \text{gon}$$

$$\beta = 78,6283 \quad \text{gon}$$

Svolgimento

Si traccia la diagonale AC e si risolvono i triangoli così ottenuti: prima il triangolo ABC poi il triangolo CDA:

$$AC = 36,732 \quad \text{m}$$

$$\alpha_1 = 54,9553 \quad \text{gon}$$

$$\gamma_1 = 66,4164 \quad \text{gon}$$

$$S_{ABC} = 469 \quad \text{m}^2$$

$$\alpha_2 = 27,7803 \quad \text{gon}$$

$$CD = 17,651 \quad \text{m}$$

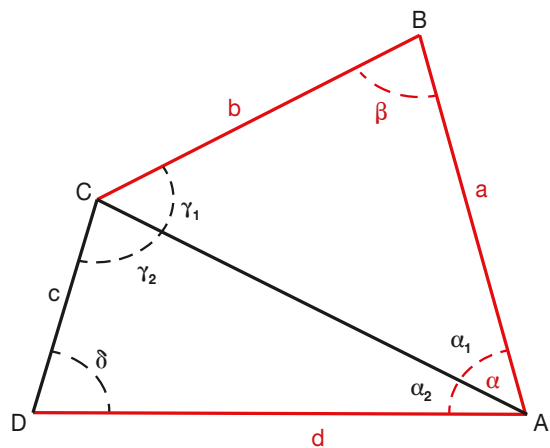
$$\gamma_2 = 103,7868 \quad \text{gon}$$

$$S_{CDA} = 324 \quad \text{m}^2$$

$$\delta = 68,4330 \quad \text{gon}$$

$$\gamma = 170,2031 \quad \text{gon}$$

$$S_{ABCD} = 793 \quad \text{m}^2$$



Come sempre accade in ambito matematico è fondamentale esercitarsi; per questo vengono proposti 30 esercizi relativi a triangoli di cui sono dati tre elementi (valori in rosso). Calcolare gli elementi mancanti (valori in nero) e l'area. Nell'ultima colonna è riportato il sistema angolare in cui è necessario operare.

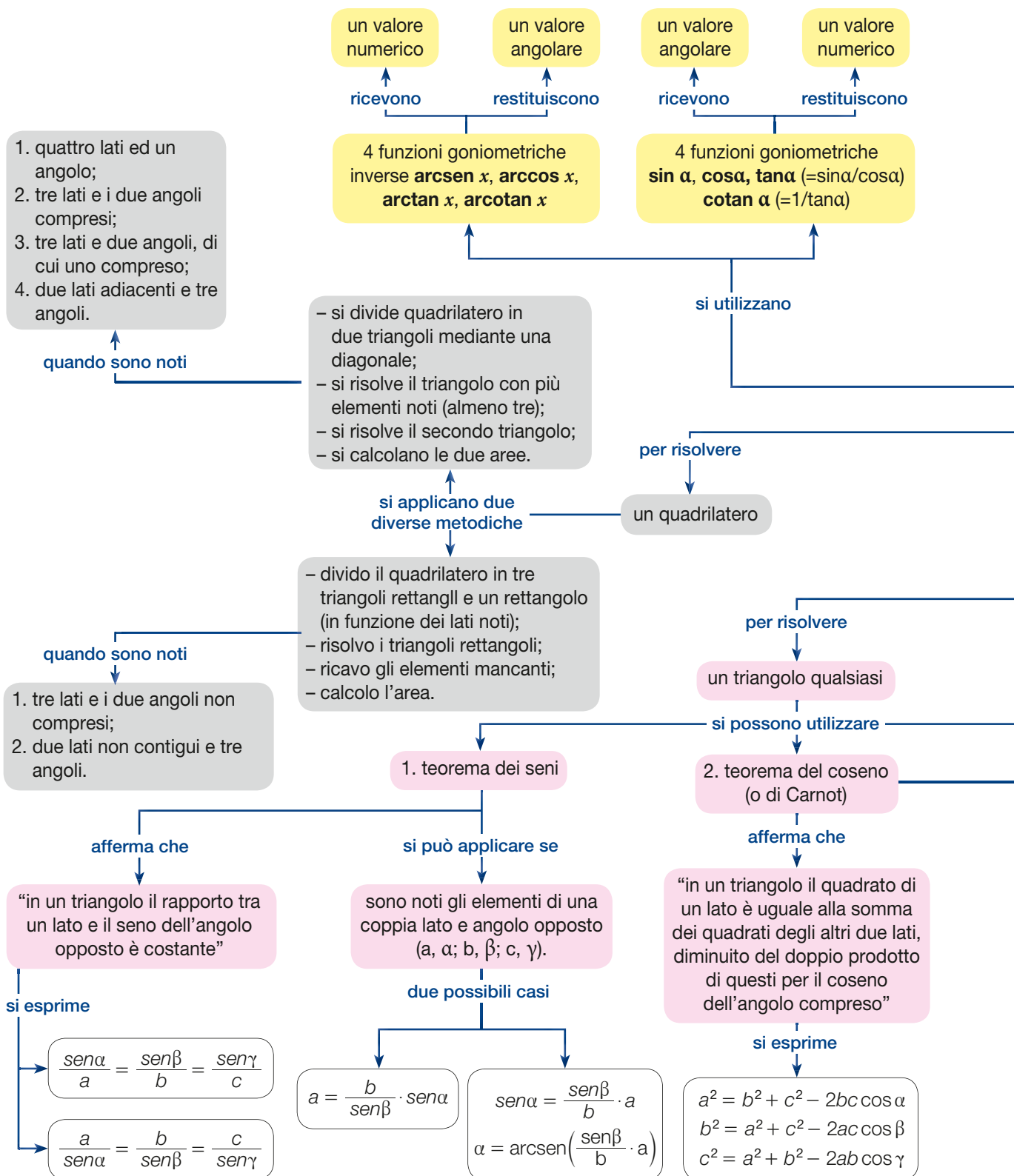
Note: non tutte le calcolatrici sono in grado di gestire i calcoli con angoli espressi in gradi sessadecimali (ad esempio $31^\circ 16' 34''$). In tal caso è necessario trasformarli in gradi sessadecimali come descritto nel capitolo 4.

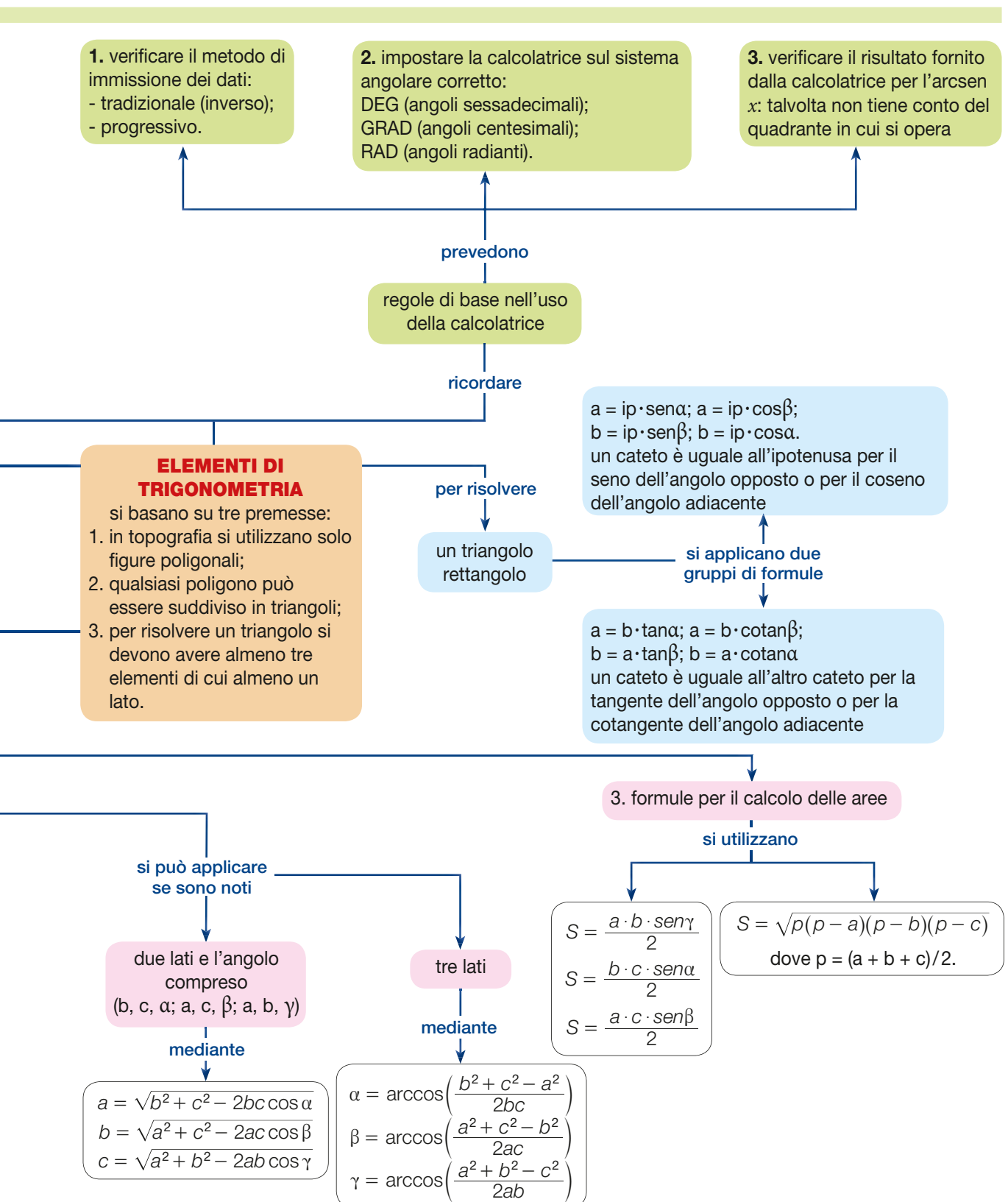
	a (BC)	b (CA)	c (AB)	α	β	γ	angoli
1	103,753	55,898	62,355	122° 22,5'	27° 0,3'	30° 25,9'	DEG
2	25,343	26,854	44,115	31° 16,6'	33° 22,5'	115° 20,9'	DEG
3	103,33	213,48	146,34	25° 40' 32"	116° 28' 21"	37° 51' 07"	DEG
4	2,438	1,324	1,938	1,6557	0,5718	0,9142	RAD
5	12,6	15,4	19,9	43,65	56,34	100,01	GRAD
6	17,20	15,80	34,55	impos.	impos.	impos.	GRAD
7	24,43	35,63	47,45	33,48	52,30	114,22	GRAD
8	65,29	88,46	76,27	45° 58'	76° 55'	57° 07'	DEG
9	impos.	188,24	impos.	145° 58'	36° 51'	impos.	DEG
10	63,34	41,21	88,46	45,432	28,010	126,558	GRAD
11	172,209	355,800	397,456	28,5256	70,5798	100,8946	GRAD
12			243,895		129,4202	42,0542	GRAD
13	215,34	244,11	407,75	25° 38'	29° 22'	125° 00'	DEG
14	285,21	239,44	impos.	impos.	95° 36' 44"	impos.	DEG
15	2,364	2,115	3,087	49,876	43,166	86,958	DEG
16	22,345	26,158	23,489	53,1668	69,5477	57,2855	DEG
17	81,303	81,303	65,042	73,8022	73,8022	52,3956	GRAD
18	3032	2364	2415	78,758°	49,876°	51,366	RAD
19	80,00			1,490°		128,634°	DEG
20	181,30	29,195	195,34	63,810	8,666	127,524	GRAD
21	37,2039	55,8300	63,8087	35,4455°	60,4899°	84,0646°	DEG
22	15,757	22,345	15,534	44,832	91,137°	44,031°	DEG
23	4,752	5,453	6,094	53,232	65,475	81,293	GRAD
24	542,33	194,23	455,68	105,987°	20,138°	53,875°	DEG
25		236,4	341,5		49,876		GRAD
26	612,3		355,8	33,55			GRAD
27	24,38	13,24	18,38				GRAD
28		15,80		33,48		114,22	GRAD
29	23,64	21,15		49,876			GRAD
30		88,46		45,58	76,55		GRAD

Anche per i quadrilateri proponiamo alcuni esercizi.

	a (AB)	b (BC)	c (CD)	d (DA)	α	β	γ	δ	angoli
1	122,45	112,61	136,41	93,85	82,377	122,351	70,416	124,856	GRAD
2	25,26	35,65	42,90	55,04	34,04°	195,89°	55,15°	74,92°	DEG
3	129,940	182,365	190,445	131,083	96°,15	102°44'	62°48'	98°13'	DEG
4	344,568	298,954	199,901	459,379	68°36'15"	49°49'56"	224°42'57"	16°50'52"	DEG
5				76,737			24°24'41"	163°09'08"	DEG
6	8,939	5,615	4,905	5,034	57°,315	74,919°	91,104°	136,662°	DEG
7	165,82		112,45	202,55		91,556	135,658		GRAD
8	82,355		160,449		112,35	129,66	98,44		GRAD
9	12,355			23,835		122,122	70,612	98,442	GRAD

Mappa di sintesi





Capitolo 2

Coordinate cartesiane e polari

In sintesi

Le coordinate cartesiane e quelle polari rappresentano lo strumento essenziale per definire la posizione di un punto nel piano o nello spazio. Si tratta del punto di partenza che ci consente di dare una rappresentazione matematica alle entità fondamentali in topografia (punti, segmenti, poligoni) senza le quali non esisterebbe la possibilità di rappresentare la superficie terrestre.

Comprendere bene le caratteristiche delle coordinate e gli strumenti matematici necessari per il loro utilizzo consente di acquisire le capacità essenziali per saper eseguire in modo corretto e consapevole le operazioni di rilievo e di elaborazione dei dati acquisiti.

In questo capitolo, dopo aver riassunto le definizioni fondamentali e le principali convenzioni connesse con le coordinate cartesiane e con le coordinate polari, proponiamo lo studio di un poligono che consentirà di applicare le principali formule connesse alle coordinate.

ITALIANO

Abstract

Cartesian and polar coordinates are the essential tools to define the position of a point, in space and time. They represent the starting point to provide a mathematical representation of topographical entities (like points, segments, polygons) and without them, it would not be possible to draft the Earth surface.

To fully understand the characteristics of the coordinates and the mathematical instruments needed for their implementation, is crucial to carry out surveying operations and the elaboration of data in the right way.

In this chapter, after having summarized the fundamental definitions and the main international conventions used with cartesian and polar coordinates, we dealing with the study of a polygon that let us use the main formulas linked to the coordinates.

CLIL

ENGLISH

1 Le coordinate cartesiane

Dobbiamo a René Descartes (Cartesio), filosofo e matematico francese (1596, 1650), la definizione di un sistema di coordinate per descrivere in modo rigoroso la posizione di un punto nel piano (e nello spazio), passaggio essenziale per la costruzione della geometria analitica, branca della matematica che ha rappresentato la sintesi fra la geometria (sviluppata dai Greci) e l'algebra (sviluppata dagli Arabi).

Le figure geometriche diventano “luoghi dei punti”, ognuna individuata in modo univoco attraverso le **coordinate cartesiane**, la cui definizione si basa su alcune convenzioni:

- adozione di due assi perpendicolari tra di loro, di cui uno orizzontale (asse x o asse delle ascisse) e uno verticale¹ (asse y o delle ordinate);
- il punto di intersezione viene detto origine;
- l'asse delle x è fissato con il verso positivo verso destra mentre l'asse y ha verso positivo verso l'alto;
- un punto del piano viene individuato da una coppia ordinata di numeri:
 - coordinata **x**, data dalla distanza dall'origine della proiezione del punto sull'asse x;
 - coordinata **y**, data dalla distanza dall'origine della proiezione del punto sull'asse y.

1. Definire l'asse y verticale in realtà non è corretto. Lo pensiamo verticale quando viene rappresentato sulla lavagna, mentre nelle applicazioni topografiche entrambi gli assi x e y appartengono al piano orizzontale sotto i nostri piedi, con l'asse y generalmente diretto verso il Nord e l'asse x diretto verso Est. È invece l'asse z (quello necessario per completare la terna spaziale) quello diretto in direzione verticale.

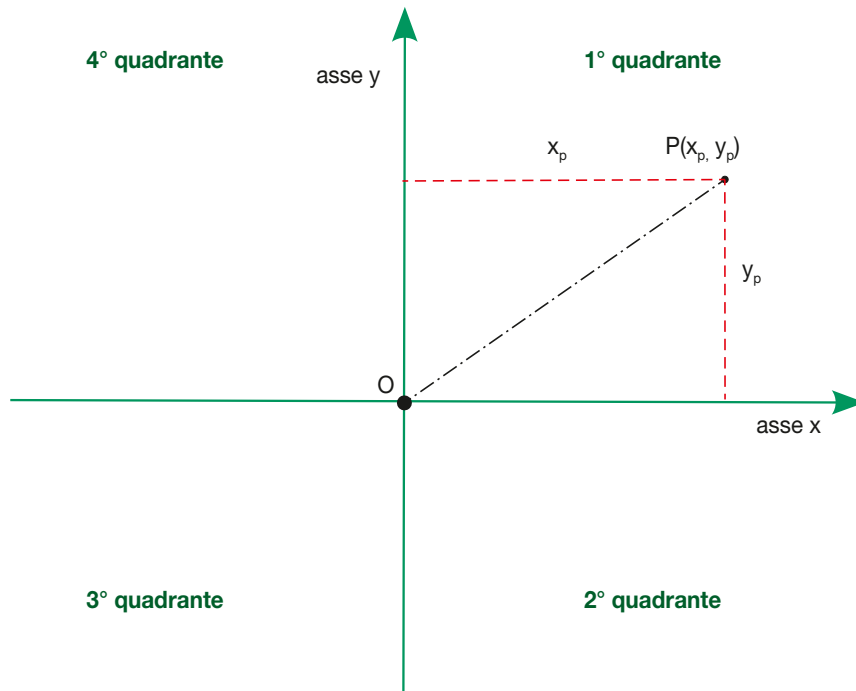


Figura 2.1

Coordinate cartesiane nel piano.

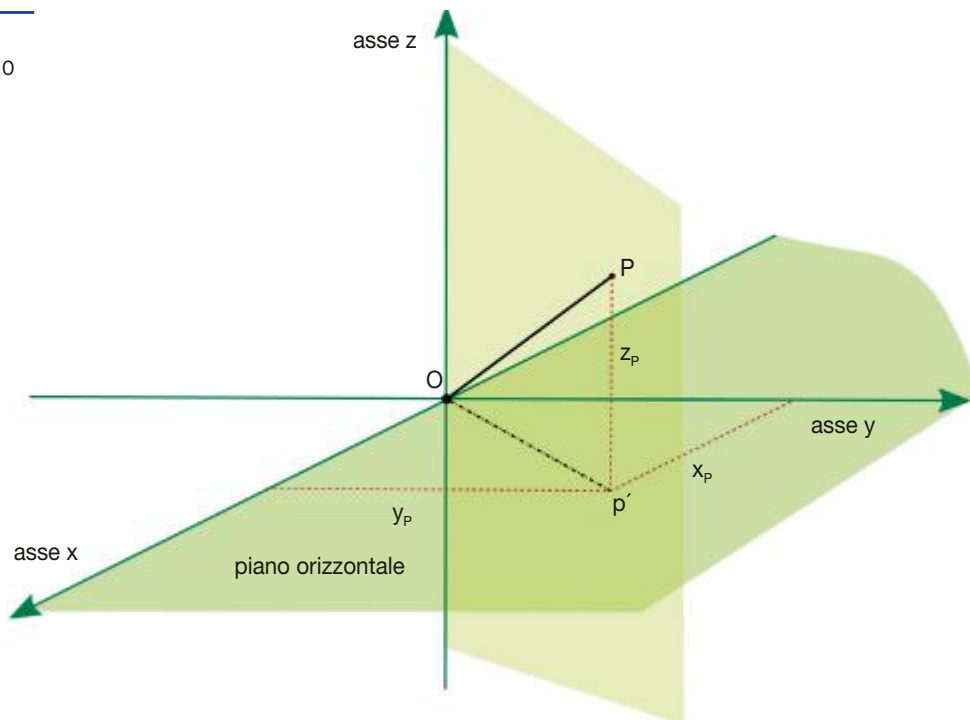
I due assi cartesiani suddividono il piano in 4 quadranti, che in topografia sono definiti secondo una convenzione diversa da quella vista in matematica:

- 1° quadrante: $x > 0$; $y > 0$;
- 2° quadrante: $x > 0$; $y < 0$;
- 3° quadrante: $x < 0$; $y < 0$;
- 4° quadrante: $x < 0$; $y > 0$.

Quanto è stato visto per il piano può essere esteso allo spazio. Ai due assi x e y si associa un terzo asse (asse z) anch'esso passante per l'origine e perpendicolare ad entrambi. Il verso positivo è diretto verso l'alto. Pertanto la posizione di un punto nello spazio viene identificata da tre coordinate: nell'ordine x , y , z .

Figura 2.2

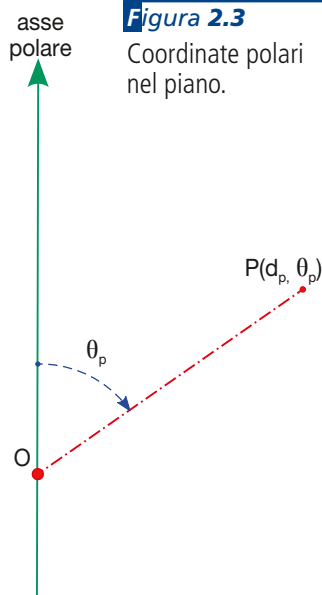
Coordinate cartesiane nello spazio.



2 Le coordinate polari

Figura 2.3

Coordinate polari nel piano.



Si tratta di un diverso sistema di coordinate molto utilizzate in topografia, in quanto si adatta molto facilmente alle modalità di funzionamento degli strumenti di misura più diffusi.

Le coordinate cartesiane vengono definite utilizzando un solo asse (detto asse polare o asse azimutale), indicato con y o N . Ha direzione e verso predefiniti che, molto frequentemente, coincidono con il Nord. Su tale asse, inoltre, viene fissato un punto (detto polo O), che assume il ruolo di origine.

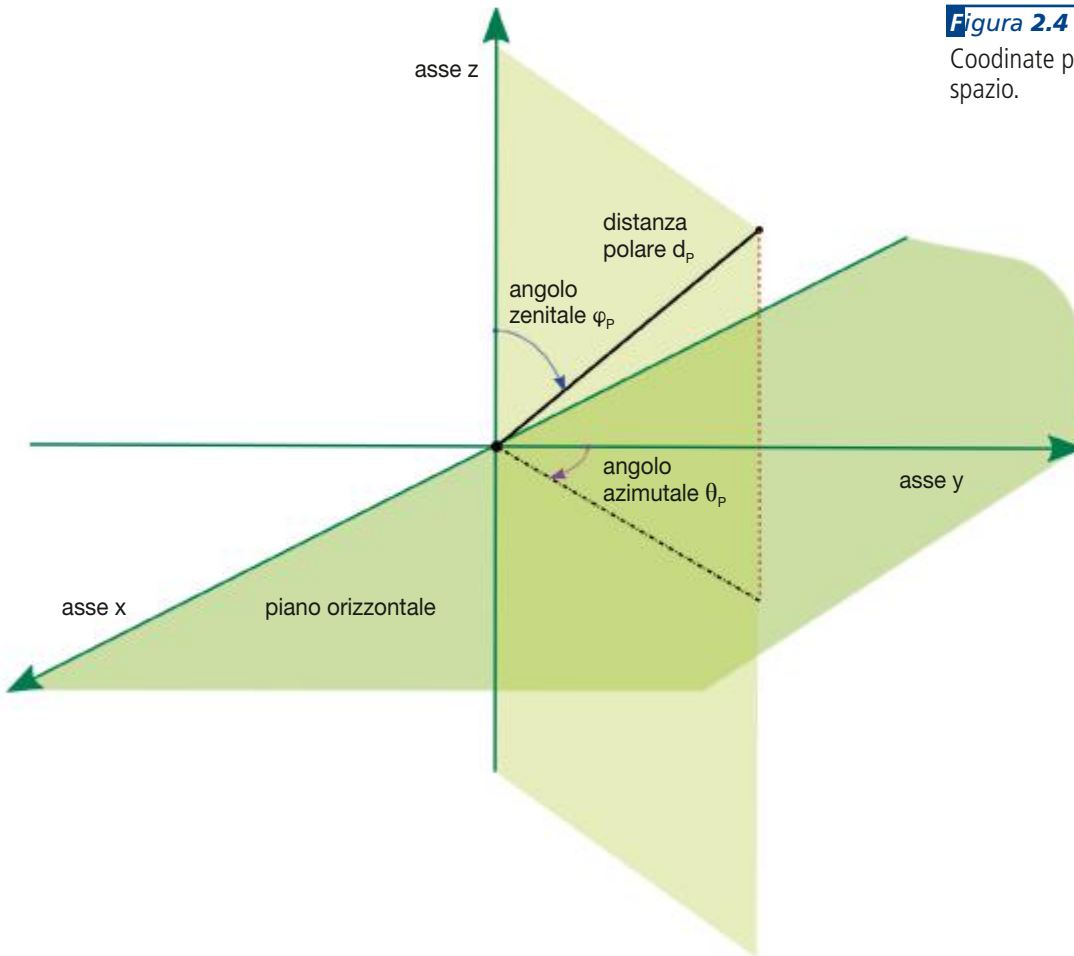
Anche nel caso delle coordinate polari la posizione di un punto P è definita da due coordinate:

- d_p : è un numero che rappresenta la distanza del punto P dall'origine O (e per questo viene indicata come **distanza polare**) e che, pertanto, varia da 0 a $+\infty$;
- θ_p : è un angolo (detta **anomalia** o angolo di direzione), misurato a partire dall'asse y , ruotando in senso orario. Qualora l'asse polare corrispondesse con il Nord, l'anomalia coincide con l'azimut. In ogni caso θ_p varia da 0 a 2π .

Per definire la posizione di un punto nello spazio, di deve aggiungere una terza coordinata data dall'angolo verticale o zenitale φ_p . Per la sua determinazione è necessario introdurre un ulteriore asse (asse z) disposto verticalmente, perpendicolare all'asse polare e diretto verso l'alto. L'angolo φ_p viene misurato a partire dall'asse verticale fino alla congiungente P con origine.

Figura 2.4

Coordinate polari nello spazio.



Le formule di conversione

Incominciamo con le formule per passare **da coordinate polari a cartesiane**.

Si tratta di formule molto semplici: date le coordinate polari d_p e θ_p si ottengono x_p e y_p con le seguenti espressioni:

$$x_p = d_p \cdot \sin \theta_p;$$

$$y_p = d_p \cdot \cos \theta_p.$$

Per quanto riguarda il passaggio **da coordinate cartesiane a polari**, le espressioni da utilizzare sono:

$$d_p^2 = x_p^2 + y_p^2 \text{ (teorema di Pitagora);}$$

$$\theta_p = \arctan\left(\frac{x_p}{y_p}\right).$$

Anche in questo caso si tratta di formule molto semplici, ma una precisazione deve essere fatta per l'espressione relativa a θ_p : la calcolatrice, quando utilizza la funzione inversa $\arctan x$, esegue i calcoli riferendosi sempre al primo quadrante e pertanto il risultato deve essere interpretato a seconda del quadrante nel quale stiamo operando (riconoscibile dal segno delle due coordinate cartesiane).

Nella seguente tabella sono riassunte le correzioni da apportare nei 4 diversi casi.

quadrante	x_P	y_P	θ_{Pcal}	θ_{Pcal}
1°	> 0	> 0	+	θ_{Pcal}
2°	> 0	< 0	-	$\theta_{Pcal} + \pi$
3°	< 0	< 0	+	$\theta_{Pcal} + \pi$
4°	< 0	> 0	-	$\theta_{Pcal} + 2\pi$

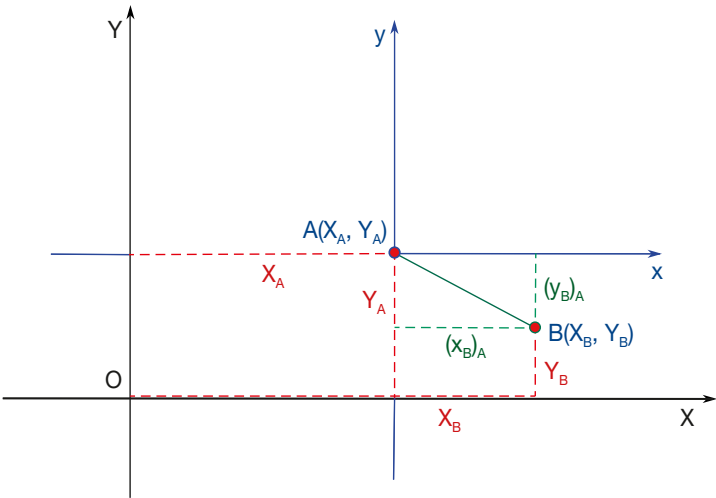
Vediamo un esempio:

quadrante	x_P	y_P	θ_{Pcal}	θ_{Pcal}
1°	4	3	59,0334 gon	59,0334 gon
2°	4	-3	-59,0334 gon	140,9666 gon
3°	-4	-3	59,0334 gon	359,0334 gon
4°	-4	3	-59,0334 gon	340,9666 gon

Le coordinate relative

Iniziamo analizzando il caso delle coordinate cartesiane.

Figura 2.5
Coordinate cartesiane principali e coordinate cartesiane parziali (o relative).



Fissato un sistema di riferimento XY con origine in O (che chiameremo principale), è possibile definire la posizione di qualsiasi punto del piano. In figura sono indicati il punto A e il punto B dei quali sono visualizzate le **coordinate cartesiane** X_A, Y_A, X_B, Y_B .

Se ora si considera un ulteriore sistema di riferimento con origine nel punto A, è possibile definire la posizione del punto B rispetto a tale riferimento. Si parla in tal caso di **coordinate cartesiane relative o parziali** (rispetto ad A) e si indicano con $(x_B)_A$ e $(y_B)_A$.

Nel caso, come riportato in figura, nel quale il sistema di riferimento principale e quello relativo siano disposti in modo che gli assi corrispondenti risultino paralle-

li, le formule per il passaggio² da coordinate relative a coordinate relative sono le seguenti:

$$X_B = X_A + (x_B)_A$$

$$Y_B = Y_A + (y_B)_A$$

Nel caso, invece, delle coordinate polari, riportiamo le formule per ottenere le coordinate polari a partire da quelle cartesiane (fare riferimento alla figura successiva):

- coordinate polari principali:

$$d_A^2 = X_A^2 + Y_A^2$$

$$\theta_A = \arctan\left(\frac{X_A}{Y_A}\right)$$

$$d_B^2 = X_B^2 + Y_B^2$$

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{X_B}{Y_B}\right)$$

- coordinate polari relative (dette anche parziali):

$$d_{AB}^2 = (x_B)_A^2 + (y_B)_A^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2$$

$$\theta_{AB} = \arctan\left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right)$$

dove con θ_{AB} e d_{AB} si intendono l'angolo orizzontale riferito all'asse y e la distanza qualora stando in A collimo a B.

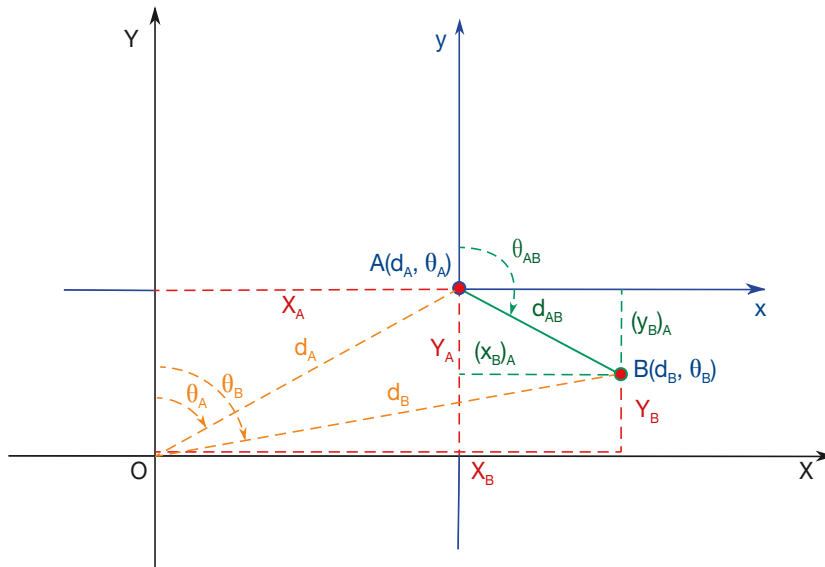


Figura 2.6

Coordinate polari assolute e relative.

Per eliminare possibili elementi di confusione riportiamo alcune note:

- con θ_{BA} si intende l'angolo, sempre riferito alla parallela all'asse y, qualora stando in B collimo ad A; d_{BA} , invece, rappresenta la medesima distanza di d_{AB} eseguita in direzione opposta;
- secondo la convenzione presentata precedentemente si dovrebbero indicare le coordinate principali di B con θ_{OB} e con d_{OB} . La prassi di non riportare il centro O aiuta proprio a ricordare che si tratta delle coordinate principali.

2. A tale trasformazione corrisponde un movimento di semplice traslazione. In caso di assi corrispondenti non paralleli, è necessario "sommare" alla traslazione anche una rotazione. In tale caso le formule di passaggio diventano:

$$X_B = X_A + (x_B)_A \cdot \cos \alpha +$$

$$+ (y_B)_A \cdot \sin \alpha;$$

$$Y_B = Y_A + (y_B)_A \cdot \sin \alpha +$$

$$+ (x_B)_A \cdot \cos \alpha$$

dove α è l'angolo formato fra le direzioni di due assi corrispondenti misurato a partire dall'asse del sistema principale e ruotando in senso orario fino a sovrapporsi all'asse del sistema relativo.

Un esempio applicativo: perimetro e angoli interni di un poligono

Prendiamo in considerazione un poligono con **vertici ordinati in senso antiorario** e di cui sono note le coordinate cartesiane.

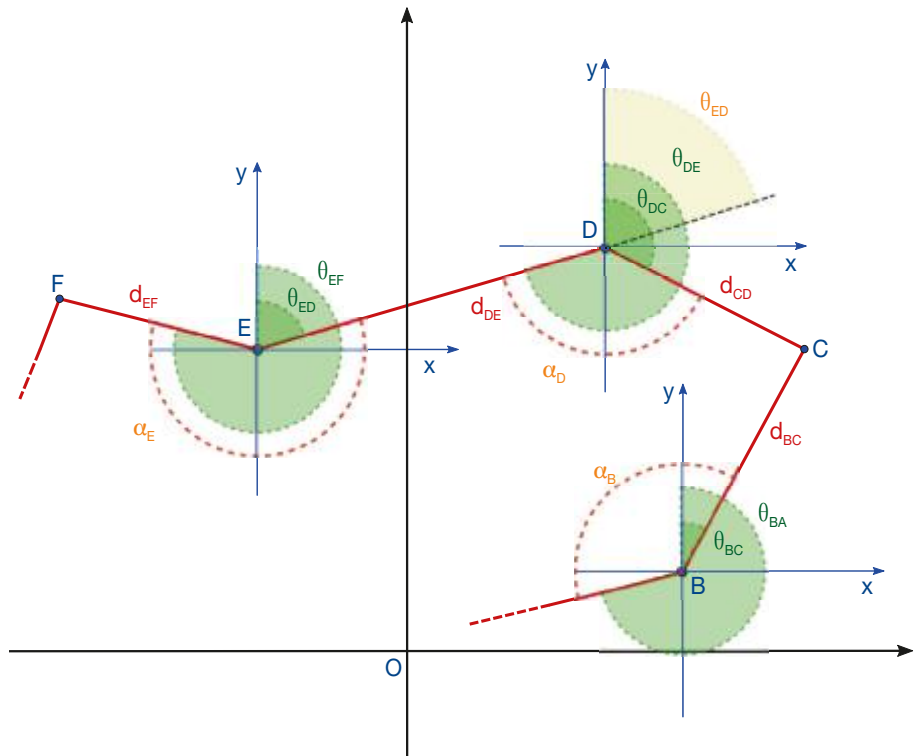
Ciascun lato può essere facilmente calcolato con la formula (derivante dal teorema di Pitagora)

$$d_{ij}^2 = (x_j)^2 + (y_j)^2 \text{ oppure } d_{ij}^2 = (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2$$

Gli angoli di direzione rispetto al riferimento prefissato ($\dots, \theta_{DE}, \theta_{EF}, \theta_{FG}, \dots$), invece, si possono calcolare con la formula:

$$\theta_{ij} = \arctan\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right)$$

Si possono ora calcolare velocemente i corrispettivi angoli di direzione **reciproci**.



Infatti, facendo riferimento all'esempio in figura si può osservare che

$$\theta_{DE} = \theta_{ED} + \pi;$$

$$\theta_{ED} = \theta_{DE} - \pi;$$

Queste espressioni si possono generalizzare con le seguenti formule:

$$\theta_{i,j} = \theta_{j,i} - \pi \quad \text{se } \theta_{j,i} > \pi$$

$$\theta_{i,j} = \theta_{j,i} + \pi \quad \text{se } \theta_{j,i} < \pi$$

Come ultimo passaggio è ora possibile determinare gli angoli interni (α_i). Si devono considerare due diversi casi (vedere figure precedenti):

- direzione di riferimento **esterna** all'angolo interno:

$$\alpha_i = \theta_{i,i+1} - \theta_{i,i-1} \text{ se } (\theta_{i,i+1} - \theta_{i,i-1}) > 0$$

- direzione di riferimento **interna** all'angolo interno:

$$\alpha_i = \theta_{i,i+1} - \theta_{i,i-1} + 2\pi \text{ se } (\theta_{i,i+1} - \theta_{i,i-1}) < 0$$

Calcolati tutti gli angoli interni non rimane che verificarne la correttezza confrontando la somma con il valore teorico dato dalla seguente formula:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi(n-2)$$

dove n rappresenta il numero di vertici.

Esercizi svolti

Iniziamo proponendo un algoritmo di calcolo per distanza e azimuth con foglio elettronico che potrete utilizzare per verificare i vostri calcoli.

	B	C	D	E
2	$X_A =$			
3	$Y_A =$			
4	$X_B =$			
5	$Y_B =$			
6		$\Delta_x =$	$=C4-C2$	
7		$\Delta_y =$	$=C5-C3$	
8		$d_{AB} =$	$=RADQ((D6^2+D7^2))$	
9			$=SE(E(D6>0;D7>0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3));"")$	rad
10		ϑ_{AB}	$=SE(E(D6>0;D7>0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))*180/PI.GRECO();"")$	deg
11			$=SE(E(D6>0;D7>0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))*200/PI.GRECO();"")$	grad
12			$=SE(E(D6>0;D7<0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))+PI.GRECO();"")$	rad
13		ϑ_{AB}	$=SE(E(D6>0;D7<0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))*180/PI.GRECO();"")$	deg
14			$=SE(E(D6>0;D7<0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))*200/PI.GRECO()+200;"")$	grad
15			$=SE(E(D6<0;D7<0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))+PI.GRECO();"")$	rad
16		ϑ_{AB}	$=SE(E(D6<0;D7<0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))*180/PI.GRECO()+180;"")$	deg
17			$=SE(E(D6<0;D7<0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))*200/PI.GRECO()+200;"")$	grad
18			$=SE(E(D6<0;D7>0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))+2*PI.GRECO();"")$	rad
19		ϑ_{AB}	$=SE(E(D6<0;D7>0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))*180/PI.GRECO()+360;"")$	deg
20			$=SE(E(D6<0;D7>0);ARCTAN((C4-C2)/(C5-C3))*200/PI.GRECO()+400;"")$	grad